ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174

УДК 517.968.2

Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов

Джасур Музофирович ОДИНАБЕКОВ

ГОУ «Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе»
734002, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1

Аннотация. Основными в теории сингулярных интегральных операторов являются проблемы ограниченности, обратимости, нётеровости и вычисления индекса. Общая теория многомерных сингулярных интегральных операторов по всему пространству E_n построена С. Г. Михлиным. Известно, что в двумерном случае, если символ оператора не обращается в нуль, то имеет место теория Фредгольма. Для операторов по ограниченной области граница этой области существенно влияет на разрешимость соответствующих операторных уравнений. В данной работе рассматриваются двумерные сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами по ограниченной области. Такие операторы применяются во многих задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных. В связи с этим представляет интерес установление критериев нётеровости рассматриваемых операторов в виде явных условий на их коэффициенты. В статье установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости двумерных сингулярных интегральных операторов в лебеговых пространствах $L_p(D)$ (рассматриваемых над полем вещественных чисел), $1 < p < \infty$, и даны формулы для вычисления индексов. Используется метод, разработанный Р. В. Дудучавой [Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case; II: The case of compact manifolds // J. Operator Theory, 1984, v. 11, 41–76 (I); 199–214 (II)]. При этом исследование нётеровых свойств операторов сводится к факторизации соответствующих матриц-функций и нахождению их частичных индексов.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нётеровость оператора

Для цитирования: *Одинабеков Д.М.* Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 164–174. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174

On the Noethericity conditions and the index of some two–dimensional singular integral operators

Jasur M. ODINABEKOV
Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe
35/1 Bokhtar St., Dushanbe 734002, Tajikistan

Abstract. The main problems in the theory of singular integral operators are the problems of boundedness, invertibility, Noethericity, and calculation of the index. The general theory of multidimensional singular integral operators over the entire space E_n was constructed by S. G. Mikhlin. It is known that in the two-dimensional case, if the symbol of an operator does not vanish, then the Fredholm theory holds. For operators over a bounded domain, the boundary of this domain significantly affects the solvability of the corresponding operator equations. In this paper, we consider two-dimensional singular integral operators with continuous coefficients over a bounded domain. Such operators are used in many problems in the theory of partial differential equations. In this regard, it is of interest to establish criteria for the considered operators to be Noetherian in the form of explicit conditions on their coefficients. The paper establishes effective necessary and sufficient conditions for two-dimensional singular integral operators to be Noetherian in Lebesgue spaces $L_p(D)$ (considered over the field of real numbers), $1 < p < \infty$, and formulas for calculating indices are given. The method developed by R. V. Duduchava [Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case; II: The case of compact manifolds // J. Operator Theory, 1984, v. 11, 41–76 (I); 199–214 (II)]. In this case, the study of the Noetherian properties of operators is reduced to the factorization of the corresponding matrix-functions and finding their partial indices.

Keywords: singular integral operator, operator index, symbol operator, Noethericity operator

Mathematics Subject Classification: 45F15, 45E05.

For citation: Odinabekov J.M. Ob usloviyakh neterovosti i indekse nekotorykh dvumernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov [On the Noethericity conditions and the index of some two–dimensional singular integral operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 164–174.
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В евклидовом пространстве E_n сингулярный интеграл имеет вид

$$Ku = a(x)u(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x, x-y)u(y)dy, \tag{0.1}$$

где

$$k(x, tx) = t^{-n}k(x,z), \quad t>0; \quad \int_{|z|=1} k(x,z)dz = 0$$

и k удовлетворяет некоторым условиям интегрируемости или гладкости.

Первые значительные результаты по многомерным сингулярным интегральным уравнениям получены Ф. Д. Трикоми (в 1926–1928), который рассмотрел случай $n=2$ и ядра $k(x,z)$, не зависящего от x. С помощью найденной им формулы композиции двух сингулярных интегралов Ф. Д. Трикоми свел решение уравнения

$$Ku = f$$

к решению некоторого одномерного сингулярного уравнения; его анализом Ф. Д. Трикоми не занимался.

Еще одна важная работа по многомерным интегралам принадлежит Р. Жиро, который исследовал сингулярные интегралы по замкнутому ляпуновскому многообразию любой размерности (1934). При весьма специальных предположениях относительно ядра k Р. Жиро распространил теорему Племеля–Привалова об ограниченности оператора K в пространстве $C^\alpha(\Gamma)$ $(0<\alpha<1)$ и построил регуляризатор для оператора K.

Как в исследованиях Ф. Д. Трикоми, так и в работе Р. Жиро отсутствовало условие эллиптичности — необходимое и достаточное условие, при котором сингулярный оператор допускает регуляризацию. Это условие появилось в работе С. Г. Михлина (1936), который ввел понятие символа оператора K (в случае $n=2$) с помощью разложения ядра в ряд Фурье по сферическим функциям. А. П. Кальдерон и А. Зигмунд впервые применили к сингулярным интегралам аппарат преобразования Фурье. В работах этих авторов и С. Г. Михлина были установлены следующие формулы:

$$\mathcal{K}(x,\xi) = a(x) + \overline{k}(x,\xi); \qquad K = F^{-1}_{\xi\to x}\mathcal{K}(x,\xi)F_{x\to\xi},$$

где $\overline{k}(x,\xi)$ — преобразование Фурье F ядра $k(x,z)$ по переменной z. Эти формулы послужили основной дальнейших многочисленных исследований в области многомерных сингулярных интегралов и интегральных уравнений. Более того, систематическое использование аппарата преобразования Фурье содействовало дальнейшему синтезу многомерных сингулярных интегральных уравнений и уравнений в частных производных, что привело к созданию теории псевдодифференциальных операторов [1–5].

В терминах символа С. Г. Михлин дал простые достаточные условия ограниченности оператора (0.1) в пространстве L_2 и доказал, что если K — эллиптический оператор, то сингулярное уравнение $Ku=f$ можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма; в отличие от случая одного уравнения индекс системы многомерных сингулярных уравнений может быть отличным от нуля. Более общие теоремы об ограниченности сингулярного оператора (0.1) в пространстве $L_p(E_n)$ $(1<p<\infty)$ были установлены А. П. Кальдероном. Начиная с этих основополагающих работ, проблематика условий ограниченности сингулярных интегралов в функциональных пространствах интенсивно развивалась (см. [2]).

Полное решение проблемы индекса для общего эллиптического оператора (содержащего в качестве частного случая эллиптический сингулярный интегральный оператор) дано в работах М. Ф. Атьи, А. Зингера и Р. Ботта (в 1963–1964).

Многими математиками получены интересные результаты о многомерных сингулярных интегральных уравнениях на многообразиях с краем или особенностями, о неэллиптических уравнениях и операторах с разрывными символами, о многомерных уравнениях Винера–Хопфа и бисингулярных уравнениях. В основе многих исследований в последних трех из перечисленных направлений лежит так называемый «локальный принцип», предложенный И. Б. Симоненко и аналогичный, в известном смысле, методу «замораживания коэффициентов» в дифференциальных уравнениях.

В продолжение [6] в данной статье мы исследуем некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы по ограниченной области D, для которых устанавливаем необходимые и достаточные условия нётеровости в пространстве $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, и получаем формулы для вычисления индекса. Полученные результаты могут применяться к задачам Дирихле и Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений порядка 2ν.

1. Основные понятия и вспомогательные результаты

Приведем необходимые определения и вспомогательные утверждения (см., например, [5–8]).

Пусть X — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* — сопряженный к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*. Множество $Ker A$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $Ker A$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $Ker A$, т. е. число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = \dim Ker A$. Через $Ker A^*$ обозначим подпространство нулей оператора A^*, т. е. множество всех решений уравнения

$$A^* x = 0, \tag{1.2}$$

называемое ядром оператора A^*, и положим $\beta_A = \alpha_{A^*} = \dim Ker A^*$. Значения α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из значений α_A или β_A конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $Ind\, A$, т. е.

$$Ind\, A = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.3}$$

Очевидно, $Ind\, A$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A конечны.

Для разрешимости уравнения

$$Ax = y, \quad y \in X, \tag{1.4}$$

необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $Ker A^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in Ker A^*$). Действительно, если уравнение (1.4) имеет решение x, а $u \in Ker A^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^* u) = (x, 0) = 0$$

(здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе).

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 1.1. Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.2).

Для нормально разрешимых операторов используются следующие понятия.

Определение 1.2. Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и значения α_A, β_A конечны.

Определение 1.3. Индексом нётерова оператора A называется целое число $Ind\, A = \alpha_A - \beta_A$.

Определение 1.4. Нётеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.

Приведем основные свойства нётеровых операторов.

Свойство 1.1. (теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причем

$$Ind\, AB = Ind\, A + Ind\, B.$$

Свойство 1.2. Если A нётеров в X то и A^* нётеров в X^*, причем

$$Ind\, A^* = -Ind\, A.$$

Свойство 1.3. (возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причем

$$Ind\,(A+T) = Ind\, A.$$

Свойство 1.4. (возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $\|B\| < \varepsilon$, оператор $A+B$ нётеров в X и

$$Ind\,(A+B) = Ind\, A.$$

Говорят, что оператор A допускает левую (правую) регуляризацию, если существует линейный ограниченный оператор R такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма. Оператор R в этом случае называется левым (правым) регуляризатором оператора A.

Свойство 1.5. Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.

О п р е д е л е н и е 1.5. Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0,1]$, которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0,1]$: по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $\|A(t_1) - A(t_2)\| < \varepsilon$, и $A(0) = A$, $A(1) = B$.

С в о й с т в о 1.6. Если операторы A и B гомотопны, то

$$Ind\, A = Ind\, B.$$

Как известно, простейшее двумерное интегральное уравнение

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)(S\overline{f})(z) = g(z), \qquad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \tag{1.5}$$

играет важную роль в теории квазиконформных отображений и теории обобщенных аналитических функций, а более общие интегральные уравнения, содержащие операторы S, $\overline{S}$, оператор Бергмана B и их различные комбинации, широко применяются при изучении краевых задач для эллиптических систем уравнений. Первые результаты относительно уравнения (1.5) связаны с именами И. Н. Векуа, А. Джураева, Н. Н. Комяка. Еще И. Н. Векуа, при условии $|a(z)| > |b(z)|$, $z \in \overline{D}$, на основе принципа сжатых отображений установил, что уравнение (0.1) однозначно разрешимо в $L^p(D)$ при p, достаточно близких к двум. В предположении гладкости коэффициентов, методом редукции к краевой задаче сопряжения для обобщенных аналитических функций, А. Джураев обнаружил, что условия $|a(z)| \neq |b(z)|$, $z \in \overline{D}$, $a(t) \neq 0$ на границе Γ области D, достаточны для нётеровости уравнения (1.5) в $L^p(D)$, $p > 2$, и что индекс оператора из (1.5) равен удвоенному индексу функции $a(t)$, $t \in \Gamma$.

Следующий важный шаг в исследовании таких операторов был сделан в работе [7], в которой рассматривался оператор

$$(\mathcal{A}f)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)S(f)(z) + d(z)(\overline{Sf})(z). \tag{1.6}$$

В предположении непрерывности коэффициентов $a(z), b(z), c(z), d(z)$ в области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ с использованием результатов Р. Дудучавы было доказано, что для нётеровости в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, оператора вида (1.6) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий

$$\Delta_1(z) > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \qquad \forall z \in \overline{D}, \tag{1.7}$$

$$\Delta_2(z) > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \qquad \forall z \in \overline{D} \ \text{ и } \ \mu(t) \neq 0 \ \ \forall t \in \Gamma, \tag{1.8}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \qquad \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \qquad \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z),$$

при этом, если выполнено (1.7), то оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный, а при выполнении (1.8) его индекс равен $\varkappa = 2\, Ind_\Gamma\, \mu(t)$.

В дальнейшем в работах Г. Джангибекова методами теории банаховых алгебр, локальным методом И. Б. Симоненко, а также методом факторизации матрицы-символа оператора изучены широкие классы двумерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами в ограниченной области. Для них получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости в лебеговых пространствах с весом в виде неравенств, содержащих алгебраические операции над коэффициентами операторов. Кроме того, найдены явные формулы для вычисления (посредством алгебраических операций над коэффициентами) индекса операторов через приращение аргумента вдоль границы Γ области D некоторых конкретных функций.

2. Нётеровость и индекс сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами

Пусть D — ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I — тождественный оператор, m и ν — целые числа, $a(z)$, $b_n(z)$, $n = -m \dots, 0, \dots, \nu$, непрерывные в области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv a(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-m}^{\nu}{}' \, b_n(z)S_nK, \tag{2.1}$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$, а операторы K, S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, (S_nf)(z) = \frac{(-1)^{|n|}|n|}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2i\nu\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad \theta = \arg(\zeta - z).$$

При различных дополнительных ограничениях на a и b_n оператор A изучался во многих работах. В [8] в случае гладкости коэффициентов для более общих операторов указаны достаточные условия нётеровости в $L^p(D)$, $p > 2$, и формулы для индекса. Частные случаи $b_n(z) = 0$ при $n \neq \nu$ и $b_0(z) = 0$, $\nu = m = 1$ изучены соответственно в [9] и [10], где найдены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, и даны формулы для вычисления индекса. Отметим, что оператор A включается в класс многомерных сингулярных интегральных операторов, для которых в [11–13] получены необходимые и достаточные условия нётеровости в пространствах $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, в терминах частных индексов матрицы-символа.

Прежде всего в данной работе устанавливается, что оператор A будет нётеровым в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} a(z)I & b_0(z)K + \sum\limits_{n=-m}^{\nu}{}' \, b_n(z)S_nK \\ \overline{b_0(z)}I + \sum\limits_{n=-m}^{\nu}{}' \, \overline{b_n(z)}\overline{S}_n & \overline{a(z)}K \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

К оператору $\mathcal{W}$ применимы результаты [11, 12]. Поскольку символ оператора S_n равен $(\sigma/\overline{\sigma})^n$, $0 < |\sigma| < \infty$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, то согласно [11, 12] свойства оператора $\mathcal{W}$ определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & P_{\nu,m}(z, \sigma/\overline{\sigma}) \\ \overline{P_{\nu,m}(z, \sigma/\overline{\sigma})} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},$$

где $P_{\nu,m}(z,\sigma/\overline{\sigma}) = \sum\limits_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n$, $|t| \le 1$. Поэтому для нётеровости оператора A необходимо, чтобы

$$\det G_z(\sigma) \neq 0,$$

т. е. $|a(z)| \neq |P_{\nu,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$. Из этого неравенства вытекает, что либо $|a(z)| > |P_{\nu,m}(z,t)|$, либо $|a(z)| < |P_{\nu,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$.

Разобьем множество всех операторов вида (2.1), удовлетворяющих условию (2.2), на следующие классы.

Определение 2.1. К классу $\mathfrak{M}$ отнесем операторы A, для которых $|a(z)| > |P_{\nu,m}(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$.

Определение 2.2. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_j$ (j целое и $-m \le j \le \nu$), если для любых $z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$ выполнено неравенство $|a(z)| < |P_{\nu,m}(z,t)|$ и $Ind_{|t|=1} P_{\nu,m}(z,t) = j$.

Теорема 2.1. *Для нётеровости оператора A в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|a(z)| > |\sum_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n|, \quad \forall z \in \overline{D}; \tag{2.3}$$

$$|a(z)| < |\sum_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.4}$$

и $a(z) \neq 0$, *когда* $Ind_{|t|=1} \sum\limits_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n \neq 0 \;\; \forall z \in \Gamma$.

При этом, если оператор A принадлежит классам $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}_j$, то его индекс равен нулю, а если $A \in \mathfrak{M}_j$ $j \neq 0$, то

$$\varkappa = -2j\, Ind_{\Gamma}\, a(z).$$

Доказательство. Пусть выполнено (2.3) или (2.4). По символу $G_z(\sigma)$ построим матрицы

$$G_z(\sigma_1 \pm i) = \begin{pmatrix} \dfrac{a(z)}{P_{\nu,m}(z,\frac{\sigma_1 \pm i}{\sigma_1 \mp i})} & \dfrac{P_{\nu,m}(z,\frac{\sigma_1 \pm i}{\sigma_1 \mp i})}{a(z)} \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma, \quad -\infty < \sigma_1 < +\infty.$$

Показывается, что для $G_z(\sigma_1 \pm i)$ справедливы представления:

$$G_z(\sigma_1 + i) = R_1^-(\sigma_1)R_1^+(\sigma_1), \qquad G_z(\sigma_1 - i) = R_2^-(\sigma_1)R_2^+(\sigma_1),$$

где $R_{1,2}^-(\sigma_1)$ аналитически продолжимы в нижнюю, а $R_{1,2}^+(\sigma_1)$ — в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, т. е. матрицы $G_z(\sigma_1 \pm i)$ имеют нулевые частные индексы. Тогда из [11, 12] следует, что оператор A нётеров в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$.

Вычислим теперь индекс оператора A. Пусть сначала A принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\tau \equiv a(z)I + \tau b_0(z)K + \tau \sum_{n=-m}^{\nu}{}' \, b_n(z)S_nK$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\tau \in [0,1]$. Поскольку $M_0 = a(z)I$, $M_1 = A$, то индекс оператора A равен нулю в любом $L^p(D)$ при $1 < p < \infty$.

Пусть A принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, т. е. выполнено (2.4) и $Ind\, P_{n,m}(z,t) = 0$, $|t| \le 1$. Тогда функция $P_{n,m}(z,t)$ имеет внутри единичного круга $|t| \le 1$ одинаковое количество нулей и полюсов. Пусть $P_{\nu,m}(z,t)$ имеет μ нулей внутри единичного круга $|t| \le 1$: $|\lambda_n(z)| < 1$, $n = 1,2,\dots,\mu$, $0 \le \mu \le m$, и μ_1 нулей вне: $|\lambda_{\mu+n}(z)| > 1$, $n = 1,2,\dots,\mu_1$, $0 \le \mu_1 \le \nu - \mu$. Тогда функцию $P_{n,m}(z,t)$ можно представить в виде

$$P_{\nu,m}(z,t) = c(z)t^{-\mu}\prod_{n=1}^{\mu}(t-\lambda_n(z))\prod_{n=1}^{\mu_1}(t-\lambda_{\mu+n}(z)),$$

$c(z) \ne 0$ в $\overline{D}$. Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$G^0_{z,\tau}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau a_1(z)}{Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)} & \dfrac{\overline{Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)}}{\tau\overline{a_1(z)}} \end{pmatrix},$$

$$Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau) = c(z)\prod_{n=1}^{\mu}(t-\tau\lambda_n(z)\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}),$$

$$Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau) = \prod_{\nu=1}^{\mu_1}(\tau\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}-\lambda_{\mu+n}(z)),\quad 0 \le \tau \le 1,\quad a_1(z) = \varphi(\tau)a(z),$$

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{M}\varepsilon, & \text{если}\quad 0 \le \tau \le \tau_0 < 1,\\ \frac{1}{M}(\varepsilon + \frac{M-\varepsilon}{1-\tau_0}(\tau-\tau_0)), & \text{если}\quad \tau_0 \le \tau \le 1, \end{cases}$$

здесь τ_0 — вещественное число, достаточно близкое к 1,

$$M = \max_{z\in\overline{D}}|a(z)|,\quad \varepsilon = \inf|Q_\mu(z,t;\tau)|\,|Q_{\mu_1}(z,t;\tau)|,$$

а инфимум берется по всем $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $0 \le \tau \le 1$.

По матрицам $G^0_{z,\tau}(\sigma)$ построим семейство интегральных операторов N^0_τ, $0 \le \tau \le 1$, вида (0.1). Нетрудно заметить, что

$$|\tau a(z)| < |c(z)|\,|\prod_{n=1}^{\mu}(1-\tau\lambda_n(z)\bar{t})|\,|\prod_{n=1}^{\mu_1}(\tau t-\lambda_{\mu+n}(z))|,$$

и $Ind\, Q_\mu(z,t;\tau)\, Q_{\mu_1}(z,t;\tau) = 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, т. е. операторы N^0_τ нётеровы. Поскольку $N^0_\tau = A$ и $N^0_0 = c(z)\lambda_{\mu+1}(z)\dots\lambda_{\mu+\mu_1(z)}K$, то индекс оператора равен нулю.

Пусть теперь A принадлежит классу $\mathfrak{M}_j$, $j \ne 0$, т. е. выполнено равенство (1.3), причем $Ind\, R_{\nu,m}(z,t) = j \ne 0$, $|t| \le 1$, $-m \le j \le n$, $a(z) \ne 0$ на Γ. Пусть функция $P_{\nu,m}(z,t)$ имеет внутри круга $|t| \le 1$ ровно μ нулей: $\lambda_n(z)$, $n = 1,2,\dots,\mu$, $0 \le \mu \le \nu$. Тогда количество полюсов $P_{\nu,m}(z)$ внутри круга $|t| \le 1$ равно $\mu = j$. Пусть вне этого круга, т. е. при $|t| > 1$ указанная функция имеет μ_1, $0 < \mu_1 \le \nu - \mu$, нулей. Построим матрицу–символ

$$G^j_{z,\tau}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1(z)}{(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^j Q_\mu(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)} & \dfrac{\overline{(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})^j Q_\mu(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)}}{\overline{a_1(z)}} \end{pmatrix},$$

где $0 \le \tau \le 1$, а функция $a_1(z)$ определяется так же, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам $G^j_{z,\tau}(\sigma)$ семейство интегральных операторов N^j_τ типа (0.1), $0 \le \tau \le 1$, и заметим, что они нётеровы, поскольку

$$|a(z)| < |c(z)|\,|\prod_{\nu=1}^{\mu}(1-\tau\lambda_n(z)\bar{t})|\,|\prod_{n=1}^{\mu_1}(\tau t - \lambda_{\mu+n}(z))|,$$

$Ind\, t^j Q_\mu(z,t;\tau)\, Q_{\mu_1}(z,t;\tau) = j \ne 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, а $a_1(z) = \varphi(\tau)a(z) \ne 0$, $z \in \Gamma$.

Так как $N^j_1 = A$, $N^j_0 = a_1(z)I + c(z)\lambda_{\mu+1}(z)\ldots\lambda_{\mu+\mu_1}(z)S_jK$, то, применив к оператору N^j_0 результаты [9], получим, что индекс оператора A определяется формулой

$$\varkappa = -2j\,Ind_\Gamma\, a(z).$$

Остается установить необходимость условия $a(z) \ne 0$, $z \in \Gamma$, когда $|a(z)| < |P_{n,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $Ind_{|t|=1} R_{\nu,m}(z,t) = j \ne 0$. Допустим, что в некоторой точке $z_0 \in \Gamma$ выполняется условие $a(z_0) = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &G^j_{z_0}(\sigma_1 - i)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i})^j c(z_0)\prod\limits_{n=1}^{\mu}(1-\lambda_n(z_0)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i})\prod\limits_{n=1}^{\mu_1}(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\lambda_{\mu+n}(z))\\ (\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i})^j\overline{c(z_0)}\prod\limits_{n=1}^{\mu}(1-\overline{\lambda_n(z_0)}\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i})\prod\limits_{n=1}^{\mu_1}(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}-\overline{\lambda_{\mu+n}(z)}) & 0 \end{pmatrix}\\ &\qquad = \begin{pmatrix} 0 & c(z_0)\prod_{n=1}^{\mu_1}(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\lambda_{\mu+n}(z_0))\\ \prod_{n=1}^{\mu}(1-\overline{\lambda_n(z_0)}\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i})^j & 0\\ 0 & (\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i})^j \end{pmatrix}\\ &\qquad \times \begin{pmatrix} \overline{c(z_0)}\prod_{n=1}^{\mu}(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\overline{\lambda_{n+\mu}(z_0)}) & 0\\ 0 & \prod_{n=1}^{\mu_1}(1-\lambda_n(z_0)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}) \end{pmatrix} \equiv R^-(\sigma_1)\delta(\sigma_1)R^+(\sigma_1), \end{aligned}$$

где $-\infty < \sigma_1 < \infty$.

Матрица $R^-(\sigma_1)$ аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость, и нули ее определителя лежат в верхней полуплоскости, а $R^+(\sigma_1)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, нули ее определителя лежат в нижней полуплоскости. Таким образом, мы имеем факторизацию матрицы $G^j_{z_0}(\sigma_1 - i)$ с частными индексами $\varkappa_{1,2} = \pm j$, т. е. отличными от нуля. В силу [11,12] это означает, что оператор A не может быть нётеровым. □

References

[1] С. Г. Михлин, *Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники*, ОГИЗ, М., 1947, 304 с. [S. G. Mikhlin, *Applications of Integral Equations to Some Problems of Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, OGIZ Publ., Moscow, 1947 (In Russian), 304 pp.]

[2] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1962, 256 с. [S. G. Mikhlin, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, FIZMATGIZ Publ., Moscow, 1962 (In Russian), 256 pp.]

[3] С. Г. Михлин, *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1959, 232 с. [S. G. Mikhlin, *Lectures on Linear Integral Equations*, FIZMATGIZ Publ., Moscow, 1959 (In Russian), 232 pp.]

[4] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, ОГИЗ, Л., 1948, 295 с. [I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, OGIZ Publ., Leningrad, 1948 (In Russian), 295 pp.]

[5] Н. И. Мусхилишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968, 511 с. [N. I. Muskhilishvili, *Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 511 pp.]

[6] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, Г. Х. Худжаназарова, “Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных операторов по ограниченной односвязной области”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, №2, 9–14; англ. пер.:G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, G. Kh. Khudzhanazarova, “The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 49–54.

[7] К. Х. Бойматов, Г. Джангибеков, “Об одном сингулярном интегральном операторе”, *УМН*, **43**:3(261) (1988), 171–172; англ. пер.:K. Kh. Boimatov, G. Dzhangibekov, “On a singular integral operator”, *Russian Math. Surveys*, **43**:3 (1988), 199–200.

[8] А. Д. Джураев, *Метод сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1987. [A. D. Juraev, *The Method of Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].

[9] Г. Джангибеков, “О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **300**:2 (1988), 272–276; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “On the Noethericity and index of a class of two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients”, *Dokl. Math.*, **37**:3 (1988), 639–643.

[10] Г. Джангибеков, “О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов”, *Докл. АН СССР*, **308**:5 (1989), 1037–1041; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral operators”, *Dokl. Math.*, **40**:2 (1990), 394–399.

[11] R. Duduchava, “On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case”, *Journal of Operator Theory*, **11**:1 (1984), 41–76.

[12] R. Duduchava, “On multidimensional singular integral operators. II: The case of compact manifolds”, *Journal of Operator Theory*, **11**:2 (1984), 199–214.

[13] Н. Л. Василевский, “Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами, II”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №3, 33–38; англ. пер.:N. L. Vasilevskii, “Banach algebras generated by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and piecewise-continuous coefficients. II”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **30**:3 (1986), 44–50.

Информация об авторе

Одинабеков Джасур Музофирович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук. Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Jasur M. Odinabekov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Mathematics and Natural Sciences Department. Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Received 18.04.2022
Reviewed 03.06.2022
Accepted for press 09.06.2022